

解析的 DP マッチングによるパターン認識

内田 誠一[†] 迫江 博昭[†]

[†]九州大学大学院システム情報科学研究院
〒812-8581 福岡市東区箱崎 6-10-1

あらまし 本報告では、パターン認識・画像処理における最も基本的な道具の1つである、動的計画法 (dynamic programming) による弾性マッチング手法— DP マッチング — について、新たな方式を提案する。すなわち、従来の DP マッチングが離散的最適化問題の幅優先探索による解法であるのに対し、本報告で提案する解析的 DP マッチングは、問題を一部連続化して捉えることで、幅優先探索なしに厳密解を解析的に与えることができる。したがって、探索の幅が非常に大きくなっていった問題に対し有効であると期待される。本報告では解析的 DP マッチングのアルゴリズムを導出し、それが実際のパターンマッチング問題に適用しうることをオンライン文字データを用いて実験的に検証する。

キーワード 動的計画法, DP マッチング, 解析的解法, オンライン文字

Analytical DP matching and its application to pattern recognition

Seiichi UCHIDA[†] and Hiroaki SAKOE[†]

[†] Faculty of Information Science and Electrical Engineering, Kyushu University
Hakozaki 6-10-1, Higashi-ku, Fukuoka-shi, 812-8581 Japan

Abstract DP (dynamic programming) matching is one of the most fundamental techniques for various pattern recognition and image processing problems. This report describes a novel DP matching algorithm, called analytical DP matching. Conventional DP matching is organized as a breadth-first search algorithm. Thus, its computational complexity depends on the search width. In contrast, analytical DP matching has a different organization; specifically, it is an analytical solution method and can provide optimal matching with computational complexity which does not depend on the search width. The details of the algorithm and performance evaluation results are discussed in this report.

Key words dynamic programming, DP matching, analytical solution, on-line character recognition

1. ま え が き

DP マッチング (dynamic programming matching) はパターン認識・画像処理の最も基本的な道具の1つである。1次元系列パターン間の非線形対応付け (弾性マッチング) を行なう手法であり、パターンの非線形伸縮を補償することが可能である。その対応付けの大局的最適性を保証できる点も大きな特長である。対象となる1次元系列パターンとしては、音声パターン、オンライン文字パターン、ジェスチャパターンといった時系列パターンが代表的である。他にも DNA 配列や輪郭構造、ステレオ画像のエピポーラ線など、時系列ではないが1次元系列として表現されるものも対象となる。

従来利用されてきた DP マッチングのアルゴリズムは、対象に依ることなく、基本的に同じ構造を持つ。すなわち、それぞれ長さ I と J を持つ2つの1次元パターンの弾性マッチング

では、図1に示すように、 $I \times J$ 個の格子点を持つトレリスを構築し、これを I 段 J 状態の多段決定過程と考える。そして、 $i = 1$ から I まですべての j で DP 漸化式なる計算を逐次行なうことで、最適方策すなわちトレリス上の最適経路を求める。これは一種の幅優先探索 (探索幅 J , 深さ I) になっている。求めた最適経路はマッチングパスや歪み関数と呼ばれ、2パターン間の最適対応関係を表現する。DP 漸化式の形式に若干のバリエーションはあるが、従来の DP マッチングは例外なくこうした構造となっている。

この従来の DP アルゴリズムの計算量は $O(IJ)$ であり、したがってパターン長 I や J に比例して増大する。1次元パターンとしてオンライン文字パターンを例にすると、 I も J も文字パターンを表現する筆点数に相当し、高々10~1000程度である。したがってアルゴリズムは十分実時間実行可能である。この計算量の少なさが、DP マッチングが広く利用されてきたことの

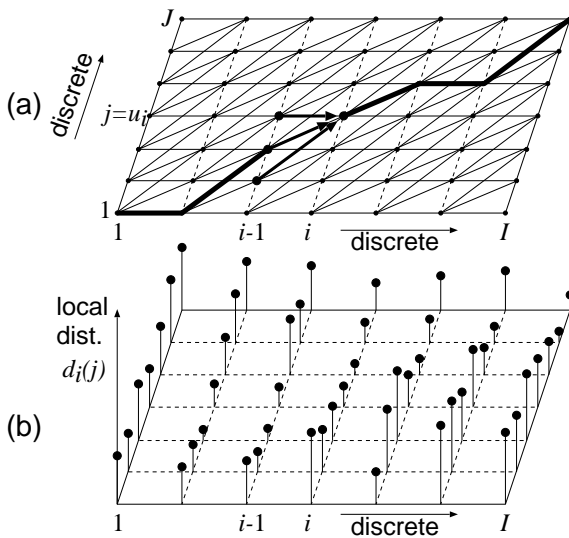


図 1 従来の DP マッチング. (a) 最適経路探索空間としてのトレリス. (b) 局所距離.

一つの理由でもある.

しかし, DP マッチングでも, 事実上計算不能となるような場合も存在する. すなわち, 状態数 J , すなわち探索幅が非常に大きくなり, したがって計算量が爆発的に増加する場合である. こうした場合は, (i) パターンがそもそも連続関数的で密な離散表現が必要とされる場合や, (ii) 画像のような 2 次元パターンのマッチング [1] を行なう場合に見られる. 特に (ii) の場合は深刻である. 例えば位相保存性を条件とする画像パターンの弾性マッチングは NP-hard 問題であることが証明されている [2]. 具体的には, その状態数 J は画像のサイズ (画素数) に対して指数的に増加する. このため実際に使う場合には, ビームサーチなど様々な近似解法を組み込まなくてはならなかった.

本報告では, これら従来扱いにくかった問題にも適用可能な新しい DP マッチングアルゴリズム — 解析的 DP マッチング — を提案する. 本手法では, 状態を連続化し, 原問題が部分的に微分可能となるように工夫する. その結果, 状態方向に対する探索を不要にすることができ, J に依らないマッチングが可能となる. より具体的には, 従来各格子点 (i, j) で定義されていた局所距離を連続関数近似し, DP 漸化式を微分可能にすることで, 解析解を求めることを可能にする. これにより, 前述した 2 次元画像の弾性マッチングのような従来適用困難とされていた問題についても, DP を用いて最適解を非常に効率的に求めることができるようになることが期待される.

2. 関連研究

DP マッチングは, 時間伸縮を伴う音声時系列パターンの弾性マッチング (非線形マッチング) を目的として 1970 年代に開発された [3] ~ [5]. 前述のように, その適用範囲の広さ, アルゴリズム実装の容易さから, パターン認識・画像処理における基本的道具の一つとなっている. 特にオンライン文字認識のアルゴリズムは, ほとんどがこの DP マッチング (もしくはその確率的拡張である HMM) に基づいて設計されていると言っても

過言ではない.

動的計画法 (DP) の考え方自体は, DP マッチングのような離散的問題に最適解を幅優先探索するアルゴリズムとしてだけでなく, 連続的な問題に対して微分を援用し最適解を解析的に求める方法 (以下, 解析的 DP) も包含する.むしろ探索空間が連続的な最適化問題 (例えば, 円弧分割問題 [6]) については, 問題を離散化して DP を適用するよりも, 解析的 DP を使用すべきであろう. 一方, パターン認識・画像処理で利用されるのは, デジタル化された対象が多いせいか, 幅優先探索を行なう DP がほとんどで [7], 解析的 DP が利用された例は極端に少ない. 実際, 解析的 DP は, 1 次元および 2 次元データの最適補間問題への利用例 [8] を見る程度であり, 本報告で検討するマッチング問題において利用されたことはない. なお, 本手法は, この文献 [8] に着想を得たものである.

後述するように, マッチング問題を解析的 DP で解くために, 本手法ではマッチング誤差 (局所距離) を 2 次関数により表現する. この考え方は Etoh [9] に着想を得ている. 同文献では, 2 画像のアフィンマッチング問題を解析的に解く手法を提案している. この種の問題は通常反復法などで数値的に解かれることが多いが, 同文献ではアフィンパラメータがマッチング誤差に与える影響を 2 次関数表現することで解析解法を導いている. 誤差ではなく, パターンそのものを関数表現する試みもある [10], [11]. 例えば大町らは [10] パターンを多項式近似することで, 線形伸縮を含むマッチング問題を効率的に解く方法を提案している. このように関数表現自体には従来より検討例があるが, 対象としている問題が弾性マッチング (非線形対応付け) である点と, 解法に DP を用いる点で, 本手法と従来の試みとは大きく異なっている.

3. 解析的 DP マッチングによる 1 次元パターンの弾性マッチング

3.1 問題の定式化

2 つの 1 次元パターン $X = x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_I$, $Y = y_1, y_2, \dots, y_j, \dots, y_J$ 間の弾性マッチングを考えられる. ここで x_i と y_j は特徴ベクトルである. 弾性マッチングは, X の第 i 要素 x_i と Y の第 $j = u_i$ 要素 y_{u_i} との対応付けを最適化する問題である. すなわち, $u_1, \dots, u_i, \dots, u_I$ の最適化問題である.

特徴ベクトル x_i と y_j 間の局所距離 (両特徴ベクトル間のマッチング誤差) を $d_i(j)$ と表すと, 本報告で扱う弾性マッチングの目的関数は以下のように表される.

$$F(u_1, \dots, u_I) = \sum_{i=1}^I d_i(u_i) + \sum_{i=2}^I \lambda(u_i - u_{i-1})^2 \quad (1)$$

第 2 項 $(u_i - u_{i-1})^2$ は対応付けの連続性評価項であり, λ は重み係数である. 境界条件として, $u_1 = 1$, $u_I = J$ を仮定する. 以下では, F を最小化する u_i を \bar{u}_i と表記する. なお, この定式化では, 従来仮定されることの多い単調性 $u_{i-1} \leq u_i$ は保証されない.

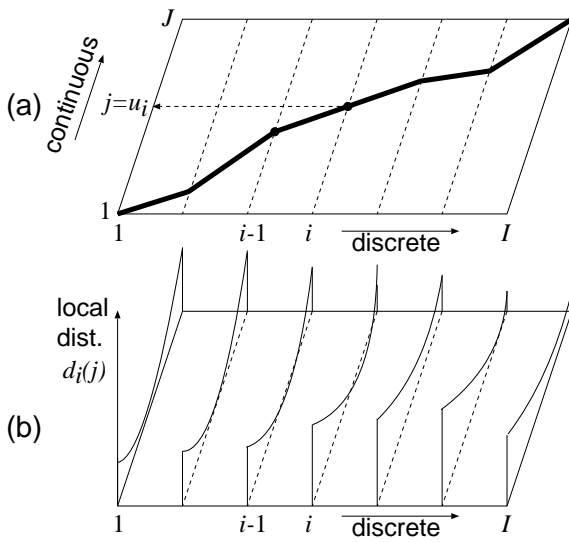


図2 解析的 DP マッチング. (a) 最適経路探索空間. (b) 局所距離.

3.2 局所距離の関数近似表現

本手法では、最適化に先立ち、第 i 段での局所距離 $d_i(j)$ を次の 2 次関数で連続表現しておく。

$$d_i(j) = \alpha_i j^2 + \beta_i j + \gamma_i \quad (2)$$

このように、各 i で 1 つの 2 次関数を定義し、それで x_i と任意の y_j 間の局所距離を近似表現する。すなわちパターン X 上の一点を固定した上で Y 上の対応点を $j = 1$ から J まで変えると、局所距離 $d_i(j)$ は 2 次関数的に変化すると考える。なお、この近似の結果、非整数の j においても $d_i(j)$ が与えられることになる。

図2は解析的 DP マッチング問題を表したものである。上述のように、局所距離は 2 次関数として各 i 毎に定義される。DP マッチングの目的は、連続性評価項 $(u_i - u_{i-1})^2$ に配慮しながら、なるべくこの局所距離の頂点に近いところを通過するようなマッチングパスを求めることになる。従来の DP マッチング(図1)においてこの曲線は整数格子点 (i, j) を通過する必要があった。一方、解析的 DP マッチングにおいては j は実数値であり、整数格子点を通過する必要はない。

局所距離を 2 次関数近似する場合、下に凸なものに限定する必要がある。これは、上に凸の 2 次関数を用いると、 $j = u_i$ が $\pm\infty$ に近づくことで $d_i(j)$ の値はいくらでも小さくなり、結果的に $\bar{u}_i = \pm\infty$ となるためである。加えて、各応用独特の工夫も必要になると思われる。本報告では、4.2 において、解析的 DP マッチングをオンライン文字認識に利用する場合について、妥当な 2 次関数近似の方法を述べる。

3.3 DP 漸化式

前節で与えた局所距離の 2 次関数表現により、目的関数 (1) は以下のように書き換えられる。

$$F(u_1, \dots, u_I) = \sum_{i=2}^I [\alpha_i u_i^2 + \beta_i u_i + \gamma_i + \lambda(u_i - u_{i-1})^2] + d_1(u_1) \quad (3)$$

Input:

Coefficients of local distance functions:

$$\{\alpha_i, \beta_i, \gamma_i \mid i = 1, \dots, I\}$$

Boundary condition: $u_1 = 1, u_I = J$

Weight: $\lambda \in \mathbb{R}^+$

Output:

Optimal correspondence: $\{\bar{u}_i \mid i = 1, \dots, I\}$

Minimum distance $\min F$

Step 1: Initial condition

$$a_I = \lambda$$

$$b_I = -2\lambda u_I$$

$$c_I = d_I(u_I) + \lambda u_I^2$$

Step 2: DP recursion

for $i = I - 1$ downto 2 do

$$a_i = \frac{\lambda(\alpha_i + a_{i+1})}{\alpha_i + \lambda + a_{i+1}}$$

$$b_i = \frac{\lambda(\beta_i + b_{i+1})}{\alpha_i + \lambda + a_{i+1}}$$

$$c_i = -\frac{(\beta_i + b_{i+1})^2}{4(\alpha_i + \lambda + a_{i+1})} + \gamma_i + c_{i+1}$$

Step 3: Termination

$$\min F = a_2 u_1^2 + b_2 u_1 + c_2 + d_1(u_1)$$

Step 4: Backtrack

$$\bar{u}_1 = u_1 = 1$$

for $i = 2$ to $I - 1$ do

$$\bar{u}_i = \frac{\lambda}{\alpha_i + \lambda + a_{i+1}} \bar{u}_{i-1} - \frac{\beta_i + b_{i+1}}{2(\alpha_i + \lambda + a_{i+1})}$$

図3 解析的 DP マッチングのアルゴリズム

ここで次のような関数を考える。

$$f_i(u_{i-1}) = \min_{u_i, \dots, u_{I-1}} \sum_{k=i}^I [\alpha_k u_k^2 + \beta_k u_k + \gamma_k + \lambda(u_k - u_{k-1})^2] \quad (4)$$

その定義より、 F の最小値は

$$\min F = f_2(u_1) + d_1(u_1) \quad (5)$$

となる。なお、上述のように u_1 は固定値であり、したがって $d_1(u_1)$ も固定値である。したがって、(3)、(5) の右辺で重要なのは第一項である。

最適性の原理から (4) は次のように表すことができる。

$$f_i(u_{i-1}) = \min_{u_i} [\alpha_i u_i^2 + \beta_i u_i + \gamma_i + \lambda(u_i - u_{i-1})^2 + f_{i+1}(u_i)] \quad (6)$$

上式は DP 漸化式 (もしくは関数方程式、関数再帰方程式) と呼ばれ、 i に関する再帰的關係を表現している。

3.4 解析的解法

ここで、 $f_i(u_{i-1})$ の 2 次関数的性質から、適当な実数 a_i, b_i, c_i を用いると

$$f_i(u_{i-1}) = a_i u_{i-1}^2 + b_i u_{i-1} + c_i \quad (7)$$

と書ける．この 2 次式表現の正当性については付録 1. で証明する．この (7) を (6) の右辺に代入すると，

$$f_i(u_{i-1}) = \min_{u_i} [\alpha_i u_i^2 + \beta_i u_i + \gamma_i + \lambda(u_i - u_{i-1})^2 + a_{i+1} u_i^2 + b_{i+1} u_i + c_{i+1}] \quad (8)$$

となる．右辺 [] 内を Q と表すと， Q を最小にする $u_i = \bar{u}_i$ は， $\partial Q / \partial u_i = 0$ を満たす必要がある．これを解いて，

$$\bar{u}_i = \frac{\lambda}{\alpha_i + \lambda + a_{i+1}} u_{i-1} - \frac{\beta_i + b_{i+1}}{2(\alpha_i + \lambda + a_{i+1})} \quad (9)$$

この $u_i = \bar{u}_i$ を (8) に代入して整理すると，

$$f_i(u_{i-1}) = \frac{\lambda(\alpha_i + a_{i+1})}{\alpha_i + \lambda + a_{i+1}} u_{i-1}^2 + \frac{\lambda(\beta_i + b_{i+1})}{\alpha_i + \lambda + a_{i+1}} u_{i-1} - \frac{(\beta_i + b_{i+1})^2}{4(\alpha_i + \lambda + a_{i+1})} + \gamma_i + c_{i+1} \quad (10)$$

が得られる．この (10) と (7) の比較により，

$$\left. \begin{aligned} a_i &= \frac{\lambda(\alpha_i + a_{i+1})}{\alpha_i + \lambda + a_{i+1}} \\ b_i &= \frac{\lambda(\beta_i + b_{i+1})}{\alpha_i + \lambda + a_{i+1}} \\ c_i &= -\frac{(\beta_i + b_{i+1})^2}{4(\alpha_i + \lambda + a_{i+1})} + \gamma_i + c_{i+1} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

となる．上式は， $a_{i+1}, b_{i+1}, c_{i+1}$ から a_i, b_i, c_i を逐次計算する方法を与えている．

この逐次計算の開始値 (a_I, b_I, c_I) は，(4) 式において $i = I$ とすることで求まる．すなわち，

$$\begin{aligned} f_I(u_{I-1}) &= \alpha_I u_{I-1}^2 + \beta_I u_{I-1} + \gamma_I + \lambda(u_I - u_{I-1})^2 \\ &= \lambda u_{I-1}^2 - 2\lambda u_I u_{I-1} + (u_I(d_I) + \lambda u_I^2) \end{aligned}$$

これと，(7) において $i = I$ とした

$$f_I(u_{I-1}) = a_I u_{I-1}^2 + b_I u_{I-1} + c_I$$

を比較することで，次のように開始値 (a_I, b_I, c_I) が求まる．

$$\left. \begin{aligned} a_I &= \lambda \\ b_I &= -2\lambda u_I \\ c_I &= u_I(d_I) + \lambda u_I^2 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

以上により，(3) の最適化問題が解けたことになる．すなわち，まず目的関数の最小値 $\min F$ については，(12) の後に (11) を反復適用することで a_2, b_2, c_2 を求め，さらにそれを (5) に代入することで，

$$\min F = f_2(u_1) + d_1(u_1) = a_2 u_1^2 + b_2 u_1 + c_2 + d_1(u_1) \quad (13)$$

として与えられる．また， X と Y 間の最適対応 $u_i = \bar{u}_i$ については，境界条件 u_1 ならびに (9) から求まる．

こうして導出された解析的 DP による弾性マッチングの最適解計算過程は，図 3 のアルゴリズムとしてまとめられる．注意すべきは，このアルゴリズムで求まるのは，目的関数 (3) の大局的最適解であるという点である．すなわち，目的関数を (1) から (3) に書き換える時点で局所距離 $d_i(u_{i-1})$ は 2 次関数近似が行なわれているが，その後の計算過程において一切近似は無く，(3) の厳密な最適解が求まる．

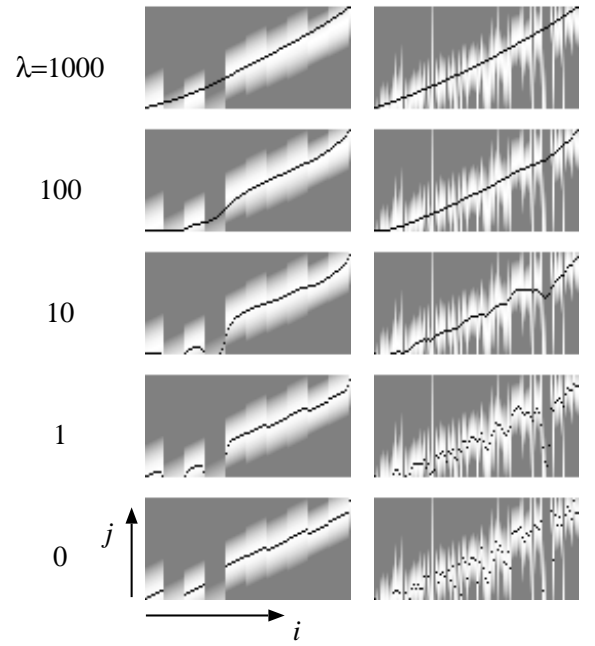


図 4 シミュレーション実験の結果

4. 実験

4.1 シミュレーション実験

図 4 は，適当な範囲の乱数を用いて人工的に生成した局所距離 $d_i(j)$ に対して，重み λ を変えながら解析的 DP マッチングを行なった結果である．同図には 2 通りの局所距離に対する結果を示しており，いずれも濃淡値が $d_i(j)$ を表現し，白いほど $d_i(j)$ が小さいことを意味する．またバックトラックの結果得られたマッチングパス $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_i, \dots, \bar{u}_I$ を黒い曲線として表している．まず $\lambda = 0$ の場合，連続性評価項が無くなるため，パスは常に各 i で $d_i(j)$ の極小点を通り，不連続なものとなっている．一方， λ が大きくなると，連続性評価項が支配的になるため，パスは直線的になっている．その中間の λ では， $d_i(j)$ の極小点付近を滑らかに通過できていることがわかる．また，いずれの場合もパスの単調増加性は保証できないことがわかる．

4.2 オンライン文字認識

解析的 DP マッチングの実パターンへの応用可能性を示すことを目的として，オンライン文字認識実験を行なった．実験では，解析的 DP マッチングにより求めた $\min F$ を入力パターン X と標準パターン Y 間の距離として用い，最短距離識別を行なった．なお，実験の目的が認識率の追及ではないため，パターンの特徴量には，単純に筆点の xy 座標情報のみを用いた．

4.2.1 実験試料

Ethem Alpaydin Digit [12] のオンライン孤立数字データセットのうち，テストパターン全 3498 サンプルを認識対象とした．全てのサンプルについて，画数変動の影響を無くす為に，ペンアップ部分も接続して 1 文字 1 画とした．その後，線形正規化ならびにリサンプリングを行った．

同データセットの学習パターンを観察し，手で標準パターンを作成した．筆順変動がある文字種に対しては複数の標準パ

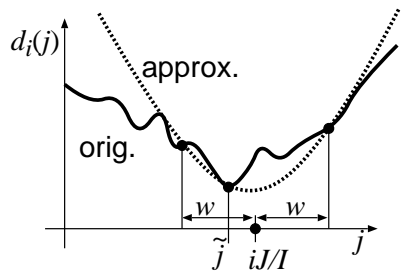


図5 局所距離の2次関数近似

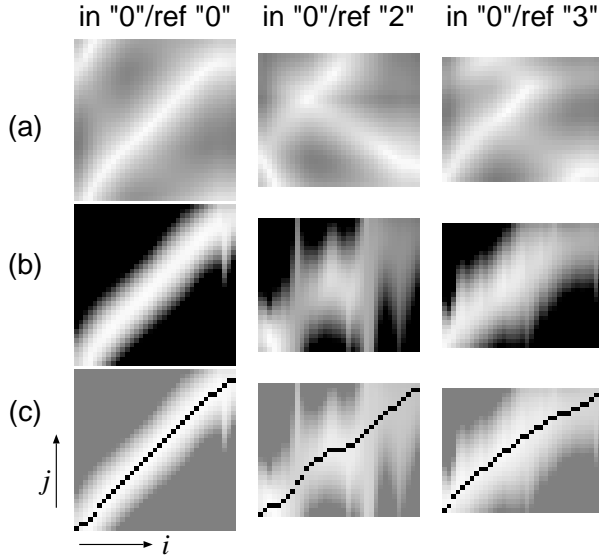


図6 3組のオンライン文字データの解析的 DP マッチング結果。(a) 真の局所距離。(b)2次関数近似した局所距離。(c)(b)上にマッチングパスを重畳したもの。

ターンを用意した。その結果、各文字種に1~4個準備され、合計21パターンとなった。テストパターン同様、すべての標準パターンにも、1画化、正規化、リサンプリングを施した。

4.2.2 2次関数近似

局所距離 $d_i(j)$ の2次関数近似については、オンライン文字認識という問題の性質を考慮する。すなわち、正しいクラスの標準パターンとのマッチングにおいては、マッチングパスがほぼ線形伸縮に近い、すなわち \bar{u}_i は多くの場合 $iJ/I \pm w$ 区間内に存在するという性質である。ここで w は区間幅を表す正定数である。この性質に基づき、区間内の真の(すなわち2次関数近似前の)局所距離値 $\|x_i - y_j\|$ を重視して、各 i の2次関数 $d_i(j)$ を定めることにした。

具体的には、図5に示す近似を行なった。まず区間の両端点 $iJ/I \pm w$ および区間内で最小の局所距離を持つ点 \tilde{j} の合計3点を決める。次にそれら3点でそれらの真の局所距離値 $\|x_i - y_j\|$ を通るような2次関数 $d_i(j)$ 、すなわち $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ を求めた。

4.2.3 マッチング結果および認識率

図6に3組のオンライン文字パターンに対する本手法によるマッチング結果を示す。重み λ および2次関数近似の際のパラメータ w は、それぞれ実験的に10および3とした。同一クラス間のマッチング(同図左)では、 (i, j) -平面の対角線付近に2次関数近似された局所距離の鋭いピークが現れており、また最

適化されたマッチングパスもそのピーク付近を適切に通過していることがわかる。また本手法には厳密な単調連続性制約はないが、得られたパスはほぼ単調連続となった点も評価できる。異なるクラス間のマッチング(同図中および右)でも同様にピーク付近を通過するほぼ単調連続なパスが求まっている。ただしピークは鋭くなく、すなわちパス通過点の局所距離 $d_i(u_i)$ は多くの i で比較的大きな値となっている。結果的に $\min J$ も大きくなるので、クラスが異なると認識結果として選出されにくくなるのがわかる。

全テストサンプルに対する解析的 DP マッチングの認識率は93.5%であった。これに対し、線形伸縮マッチング(すなわち $\lambda = \infty$)による認識率は91.1%であった。このことから、解析的 DP マッチングによるパターン整合の実応用への有効性がわかる。また、 $\lambda = 0$ とした場合、すなわち \bar{u}_i が2次関数のピーク位置に一致する場合(5.1参照)の認識率は92.8%であった。このことから、連続性評価項は実応用において重要な意味を持つことを示している。

さらに従来の DP マッチング法による認識実験も行なった。広く用いられている単調連続性条件 $u_i - u_{i-1} \in \{0, 1, 2\}$ によりパスを制約した。また整合窓すなわち条件 $\|i - u_i\| \leq W$ による制約も併用した。その結果、 $W = 5$ の時に最高認識率94.5%を得た。本手法の認識率のほうやや低いが、厳密な単調連続性条件下での従来法と大きな差が無かったことは、本手法で求めたマッチングパスが多くの場合良好なものであったことを示唆している。

5. 議論

5.1 妥当性の検証

解析的 DP マッチングの妥当性を、最適解が自明な場合を用いて例示する。具体的には、連続性評価項の無い場合($\lambda = 0$)を考える。この場合、 F の最小化問題は各 i で独立して考えることができる。したがって x_i の最適対応点 \bar{u}_i ($i \notin \{1, I\}$) の理論値は $d_i(u_i)$ の最小値を与える点、すなわち $\bar{u}_i = -\beta_i/2$ になる。

一方、前述のアルゴリズムに従えば、まず(12)において $\lambda = 0$ とおくことで、

$$a_I = b_I = 0, \quad c_I = d_I(u_I)$$

が得られる。その後は(11)により

$$a_i = b_i = 0, \quad c_i = -\frac{\beta_i^2}{4\alpha_i} + \gamma_i + c_{i+1}$$

が順次得られる。その結果、

$$\begin{aligned} \min F &= f_2(u_1) + d_1(u_1) \\ &= -\frac{\beta_2^2}{4\alpha_2} + \gamma_2 + c_3 + d_1(u_1) \\ &= \sum_{i=2}^{I-1} \left(-\frac{\beta_i^2}{4\alpha_i} + \gamma_i \right) + d_I(u_I) + d_1(u_1) \end{aligned}$$

となる。これは、両端点での固定値と各 i での2次関数の極小値を合計したものになっている。また \bar{u}_2 は、

$$\bar{u}_2 = \frac{0}{\alpha_2 + 0 + \alpha_3} \bar{u}_1 - \frac{\beta_2 + b_3}{2(\alpha_2 + 0 + \alpha_3)} = -\frac{\beta_2}{2\alpha_2}$$

となり、さらに \bar{u}_3 以降も $\bar{u}_i = -\beta_i/(2\alpha_i)$ となることがわかる。このように、 $\lambda = 0$ の場合について、提案するアルゴリズムで求まった解は最適解に一致しており、本手法の妥当性を例示している。

5.2 連立解法との関係

目的関数 F の最小化問題は、解析的 DP 以外の方法でも解くことができる。すなわち、目的関数 F の極値条件 $\partial F/\partial u_i = 0$ を u_1, \dots, u_{I-1} について連立し、得られた $(I-1) \times (I-1)$ 連立一次方程式を解くという方法（以下連立解法と呼ぶ）が考えられる。この場合、連立方程式の係数行列は 3 重対角になる。したがって逆行列を求めることなく逐次代入処理で解くことができる [13]。

連立解法と本手法には多くの類似点があるが、以下のような違いもある。

- 連立解法の最適対応 $\{\bar{u}_i\}$ を求める方法である。したがって、目的関数 F の最小値を求める場合は、これら最適値が求まった後で改めて計算する必要がある。一方、本手法ではまず F の最小値が求まり、その後のバックトラック処理により $\{\bar{u}_i\}$ が求まる。この F の最小化、すなわち 1 次元パターンの弾性マッチング問題において、両者の計算量は共に $O(I)$ であり、大きな違いはない。しかし、パターン認識で F の最小値だけが必要になる場合には、バックトラック部を省略できる本手法がやや有利である。

- 2 次元的な問題への拡張を考えた場合、すなわち変数 u_i が u_{i_1, i_2} のように 2 次元化し、さらに u_{i_1, i_2} が近傍の変数 $u_{i_1 \pm 1, i_2 \pm 1}$ と互いに影響するような場合、連立解法はもはや単純な 3 重対角行列には基づかず、したがって大規模な逆行列を解く必要が出てくると予想される。一方、解析的 DP は、Angel [8] の例のように、問題のマルコフ性を活かして、 u_{i_1, i_2} を i_1 毎にまとめたカラムワイズな処理が適用できる。その結果大規模な逆行列計算が不要な最適化過程を実現できるものと期待される。

6. まとめ

解析的 DP マッチングを提案した。本手法は、従来の幅優先探索的な DP マッチングとは異なり、DP の解析的解法としての側面を利用した方法になっている。この解析的解法を可能としたのは、局所距離を関数表現し、それに応じて状態を連続化することで、これまでのような有限個の状態を個々に考える必要を無くしたためである。したがって、従来の DP マッチングでは困難であった状態が非常に多い問題に対して本手法は特に有効と思われる。本報告では 1 次元パターン間の弾性マッチング問題を用いて、本手法の基本的なアルゴリズムの導出をおこなった。また、オンライン文字パターンなど、実際の 1 次元パターンのマッチングを行なうことで、実应用到に適用可能であることを示した。

1 次元パターンの弾性マッチング問題は、状態をさほど必要としない問題であり、したがって本手法の計算量的な利点を示

すのには不十分と考えている。今後は、本報告の議論を進展させ、指数関数的な状態数を要する 2 次元パターンの弾性マッチング問題を解析的 DP マッチングにより解く予定である。

文 献

- [1] S. Uchida and H. Sakoe, "A survey of elastic matching techniques for handwritten character recognition," IEICE Trans. Info. & Syst., vol. E88-D, no. 8, pp. 1781-1790, 2005.
- [2] D. Keysers and W. Unger, "Elastic image matching is NP-complete," Pattern Recog. Lett., vol. 24, no. 1-3, pp. 445-453, 2003.
- [3] 迫江博昭, 千葉成美, "動的計画法を利用した音声の時間正規化に基づく連続音声認識," 日本音響学会誌, vol. 27, no. 9, pp. 483-490, 1971.
- [4] H. Sakoe and S. Chiba, "A dynamic programming algorithm optimization for spoken word recognition," IEEE Trans. Acoust. Speech and Signal Proc., vol. ASSP-26, no. 1, pp. 43-49, 1978.
- [5] H. Sakoe, "Two-level DP-matching algorithm—a dynamic programming based pattern matching algorithm for continuous speech recognition," IEEE Trans. Acoust. Speech and Signal Proc., vol. ASSP-27, no. 6, pp. 588-595, 1979.
- [6] 鍋島一郎, 動的計画法, 数学ライブラリー 7, 森北出版, 1968.
- [7] 大田友一, 山田博三, "動的計画法によるパターンマッチング," 情報処理, vol. 30, no. 9, pp. 1058-1066, 1989.
- [8] E. Angel, "Dynamic programming for noncausal problems," IEEE Trans. Automatic Control, vol. AC-26, no. 5, pp. 1041-1047, 1981.
- [9] M. Etoh, "Promotion of block matching: parametric representation for motion estimation," Proc. ICPR, vol. 1 of 2, pp. 282-285, 1998.
- [10] 大町方子, 大町真一郎, 齋藤恒雄, "関数を用いた認識のためのパターン表現法," 信学技報, PRMU2005-84, 2005.
- [11] J. Kybic, M. Unser, "Fast parametric elastic image registration," IEEE Trans. Image Proc., vol. 12, no. 11, pp. 1427-1442, 2003.
- [12] <ftp://ftp.ics.uci.edu/pub/machine-learning-data-bases/pendigits/>
- [13] J.R. Westlake 著, 戸川隼人訳, コンピュータのための線形計算ハンドブック, 培風館, 1972.

付 録

1. 式 (7) の妥当性

ここでは式 (7) のように $f_i(u_{i-1})$ が常に u_{i-1} に関する 2 次式で表現できることを帰納法で証明する。まず $i = I$ の時、

$$f_I(u_{I-1}) = \alpha_I u_I^2 + \beta_I u_I + \gamma_I + \lambda(u_I - u_{I-1})^2$$

であり、右辺は u_{I-1} に関する 2 次式である。

次に $i + 1$ ($i < I$) の時に成り立つと仮定して、 i の時も成り立つことを示す。この仮定は $f_{i+1}(u_i)$ が

$$f_{i+1}(u_i) = a_{i+1} u_i^2 + b_{i+1} u_i + c_{i+1}$$

と表現できることを意味する。この式を (6) 右辺に代入して整理すると、結局 $f_i(u_{i-1})$ は (8) となる。したがって $f_i(u_{i-1})$ は最終的に (10) と表され、これは u_{i-1} に関する 2 次式になっている。以上より、証明終。