

## 解析的 DP マッチング

内田 誠一<sup>†a)</sup> 迫江 博昭<sup>†</sup>

Analytical DP Matching

Seiichi UCHIDA<sup>†a)</sup> and Hiroaki SAKOE<sup>†</sup>

あらまし パターン認識・画像処理において多用される弾性マッチング手法に動的計画法によるマッチング、いわゆる DP マッチングがある。DP マッチングは離散化された最適化問題の幅優先探索に基づく解法であり、したがって探索の幅が非常に大きくなる問題に対しては適用困難であった。この問題を解決すべく本論文では解析的 DP マッチングを提案する。本手法では、マッチングの評価に用いられる局所的な誤差関数を二次関数近似することで、幅優先探索なしに解析的に近似解（二次関数近似された問題の厳密解）を与えることができる。本論文では一次元パターンに対するマッチングアルゴリズムを導出し、更に実際の問題に適用し得ることをオンライン文字データを用いて実験的に検証する。

キーワード 動的計画法, DP マッチング, 解析的解法, オンライン文字認識

### 1. ま え が き

動的計画法 (DP) [1], [2] に基づくパターンマッチング法—DP マッチング—は、音声パターンの非線形対応付け（弾性マッチング）を目的として 1970 年代に開発された [3] ~ [5]。その後応用範囲は広がり、今ではパターン認識・画像処理における基本的道具の一つとなっている [6] ~ [8]。特に、音声やオンライン文字データ、ジェスチャなどの時系列パターンの弾性マッチング問題に対しては、非常に多くの場合において DP マッチングが利用されている。同問題に対して HMM が利用されることもあるが、HMM のゆう度計算のビタビアルゴリズムが DP マッチングと等価な処理であることを考えると、ほとんどすべての場合について、DP マッチングが利用されているという見方もできよう。

この DP マッチングの特徴は、長さ  $I$  と  $J$  の二つの一次元パターンに対し、それらの大局的に最適な非線形対応付けを  $O(IJ)$  の計算量で求める点にある。オンライン文字パターンを例にすると、パターン長は文字パターンを表現するデータ点の数に相当し、たかだ

か 10 ~ 100 程度である。したがって非常に高速に最適解が求まる。この計算量の少なさが、DP マッチングが広く利用されてきたことの一つの理由でもある。

しかし、このことは  $I$  や  $J$  が非常に大きな問題には DP マッチングを事実上適用できないことを意味する。例えば、二次元パターンの弾性マッチング問題を DP で解く場合、 $J$  は画像のサイズ（画素数）に対して指数的に増加する [9], [10]。このためこれまで二次元パターンの弾性マッチング問題を DP で解く場合、マッチング自由度の部分的な制約や、ビームサーチなどの近似解法が援用されてきた。

本論文では、従来扱いにくかった問題にも適用し得る新しい DP マッチングアルゴリズム—解析的 DP マッチング—を提案する。本手法では、原問題を一部連続近似して微分可能となるように工夫する。その結果、最適対応付けが微分に基づいて解析的に計算できるようになり、更にその計算量は  $J$  に依存しない。本論文では一次元パターンを対象とした解析的 DP マッチングアルゴリズムを導出し、その精度や計算量を評価する。また実際の問題に適用し得ることをオンライン文字データを用いて実験的に検証する。

### 2. 従来の DP マッチング

二つの一次元パターン  $X = x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_I$ ,  $Y = y_1, y_2, \dots, y_j, \dots, y_J$  間の弾性マッチングを考

<sup>†</sup>九州大学大学院システム情報科学研究院, 福岡市  
Faculty of Information Science and Electrical Engineering,  
Kyushu University, 744 Motoooka, Nishi-ku, Fukuoka-shi,  
819-0395 Japan

a) E-mail: uchida@is.kyushu-u.ac.jp

える．ここで  $x_i$  と  $y_j$  は特徴ベクトルである．弾性マッチングは， $X$  の第  $i$  要素  $x_i$  と  $Y$  の第  $j$  要素  $y_j$  との対応付け  $j = u_i$  ( $i = 1, \dots, I$ ) を最適化する問題である．具体的には，局所距離

$$d_i(j) = \|x_i - y_j\| \quad (1)$$

を用いて  $\sum_{i=1}^I d_i(u_i)$  と定義される目的関数を， $\{u_i\}$  に対する単調連続性制約（本論文では  $u_i - u_{i-1} \in \{0, 1, 2\}$ ）のもとで最小化する問題となる．ここで  $\|\cdot\|$  はユークリッドノルムを表す．

従来の DP マッチング（以下，従来法）でこの最適化問題を解く場合，図 1(a) のような  $I \times J$  個の格子点をもつトレリスを考える．各格子点では同図 (b) のように局所距離が定義される．トレリス上の経路  $u_1, \dots, u_i, \dots, u_I$ （同図 (a) 中の太線）を考えると，経路上で  $d_i(u_i)$  を累積したものが上述の目的関数である．したがって弾性マッチング問題はトレリス上の最適経路問題に帰着し，DP による最適解探索過程は最適経路を幅優先探索する過程に相当する．計算量は探索幅  $J$  と深さ  $I$  の積に比例，すなわち  $O(IJ)$  となる．最適経路はマッチングパスやひずみ関数とも呼ばれる．また目的関数の最小値は  $X$  と  $Y$  のマッチング距離として利用される．

式 (1) の制約付き最小化問題について， $u_i$  を  $i = 1$  から  $I$  まで逐次決定していく過程を考えてみると，それが（単純）マルコフ性をもった多段決定過程 [2] となることが分かる．すなわち  $u_i$  の決定は直前の決定

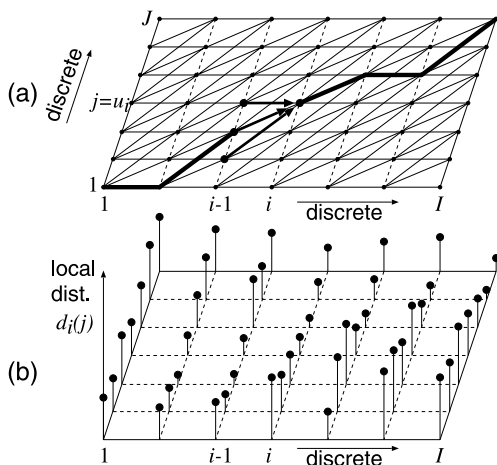


図 1 従来の DP マッチング．(a) 最適経路探索空間としてのトレリス．(b) 局所距離

Fig. 1 Conventional DP matching.

$u_{i-1}$  のみに依存し（単調連続性制約による依存関係），それ以前には依存しない．このマルコフ性により，弾性マッチング問題が DP の枠組みで効率的に解けることが保証されている．

### 3. 解析的 DP マッチング

#### 3.1 問題の定式化

解析的 DP マッチングは次の目的関数の最小化問題として定式化される．

$$F(u_1, \dots, u_I) = \sum_{i=1}^I d_i(u_i) + \sum_{i=2}^I \lambda(u_i - u_{i-1})^2 \quad (2)$$

第 1 項は局所距離の累積値である．また，第 2 項  $(u_i - u_{i-1})^2$  は対応付けの連続性評価項であり， $\lambda$  は重み係数である<sup>(注1)</sup>．境界条件として， $u_1 = 1, u_I = J$  を仮定する．以下では， $F$  を最小化する  $u_i$  を  $\bar{u}_i$  と表記する．この定式化では，単調性  $u_{i-1} \leq u_i$  は保証されない．また連続性についても，従来法のような制約条件としてではなく，上述の連続性評価項によって実現される．なお (2) の最小化問題も，従来法と同様，マルコフ性をもつ多段決定過程とみなせる．

#### 3.2 局所距離の関数近似表現

本手法では，最適化に先立ち，第  $i$  段での局所距離  $d_i(1), \dots, d_i(j), \dots, d_i(J)$  を次のように二次関数で近似表現しておく．

$$d_i(j) = \alpha_i j^2 + \beta_i j + \gamma_i \quad (3)$$

すなわち各  $i$  で一つの二次関数を定義し，そのパラメータ  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$  をあらかじめ定めておくことになる．従来法では局所距離 (1) が整数格子点  $(i, j)$  において離散的に定義されていたのに対し，解析的 DP マッチングにおいては，非整数の  $j$  においても  $d_i(j)$  が与えられることになる．したがって，(2) の最小化において  $u_i$  が整数値である必要がなくなる．

図 2 は解析的 DP マッチングの概要を表したものである．上述のように，局所距離は二次関数として各  $i$  ごとに定義される．本手法の目的は，連続性評価項  $(u_i - u_{i-1})^2$  に配慮しながら，なるべくこの二次関数の頂点に近いところを通過するようなマッチングパス

(注1): 単調増加性に配慮し，連続性評価項を  $(u_i - u_{i-1} - 1)^2$  と定義してもよい．ただし， $u_1 = 1, u_I = J$  という境界条件のもとでは，実質的には  $(u_i - u_{i-1})^2$  との差はほとんどない．実際，後述する認識実験において両者に大きな差異は認められなかった．

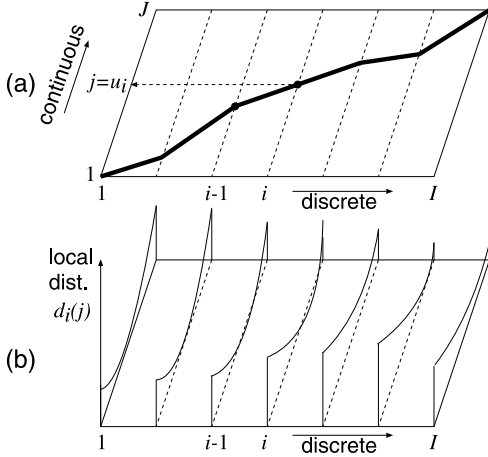


図2 解析的 DP マッチング. (a) 最適経路探索空間. (b) 局所距離

Fig. 2 Analytical DP matching.

を求めることになる。従来法(図1)においてこのパスは整数格子点  $(i, j)$  を通過する必要があった。一方, 解析的 DP マッチングにおいては, 上述のとおり  $j$  及び  $u_i$  は実数であり, 整数格子点を通過する必要はない。

局所距離を二次関数近似する場合, 上に凸の二次関数を用いると,  $j = u_i$  が  $\pm\infty$  に近づくことで  $d_i(j)$  の値はいくらでも小さくなり, 結果的に  $\bar{u}_i = \pm\infty$  となってしまう。こういう不都合を避けるために,  $\alpha_i \geq 0$  として下に凸な二次関数に限定する必要がある。

### 3.3 DP 漸化式

前節で与えた局所距離の二次関数表現により, 目的関数 (2) は以下のように書き換えられる。

$$F(u_1, \dots, u_I) = d_1(u_1) + \sum_{i=2}^I \left[ \alpha_i u_i^2 + \beta_i u_i + \gamma_i + \lambda(u_i - u_{i-1})^2 \right] \quad (4)$$

Angel [11] に倣い, ここで次のような関数を考える。

$$f_i(u_{i-1}) = \min_{u_i, \dots, u_{I-1}} \sum_{k=i}^I \left[ \alpha_k u_k^2 + \beta_k u_k + \gamma_k + \lambda(u_k - u_{k-1})^2 \right] \quad (5)$$

この定義より,  $F$  の最小値は

$$\min F = d_1(u_1) + f_2(u_1) \quad (6)$$

となる。

最適性の原理から (5) は次のように表せる。

$$f_i(u_{i-1}) = \min_{u_i} \left[ \alpha_i u_i^2 + \beta_i u_i + \gamma_i + \lambda(u_i - u_{i-1})^2 + f_{i+1}(u_i) \right] \quad (7)$$

上式は DP 漸化式(若しくは関数方程式, 関数再帰方程式)と呼ばれ,  $i$  に関する再帰的關係を表現している。

従来法では, この DP 漸化式に基づいた幅優先探索を行う。すなわち,  $u_{i-1}$  を整数とし, 各  $u_{i-1} \in [1, 2, \dots, J]$  について  $f_i(u_{i-1})$  の値を求め, テーブル化しておく。そして次に, この  $f_i(u_{i-1})$  の値を用いながら, やはり  $J$  通りの  $u_{i-2}$  について,  $f_{i-1}(u_{i-2})$  の値を求め, テーブル化する。この処理を  $i = I$  から 1 まで(逆も可)続けることで, 最小値  $f_2(u_1)$  を求めることになる。これに対し本手法では, このような幅優先探索は行わず, 微分により最適な  $u_i = \bar{u}_i$  を  $u_{i-1}$  により一意かつ解析的に求める。以下にその詳細を述べる。

### 3.4 解析的解法

関数  $f_i(u_{i-1})$  は, その二次関数的性質から, 変数  $a_i, b_i, c_i$  を用いて

$$f_i(u_{i-1}) = a_i u_{i-1}^2 + b_i u_{i-1} + c_i \quad (8)$$

と書ける。この正当性については付録で証明する。上式 (8) を (7) の右辺に代入すると,

$$f_i(u_{i-1}) = \min_{u_i} \left[ \alpha_i u_i^2 + \beta_i u_i + \gamma_i + \lambda(u_i - u_{i-1})^2 + a_{i+1} u_i^2 + b_{i+1} u_i + c_{i+1} \right] \quad (9)$$

となる。右辺 [ ] 内を  $Q$  とおくと,  $Q$  を最小にする  $u_i = \bar{u}_i$  は,  $\partial Q / \partial u_i = 0$  を満たす必要がある。これを解いて,

$$\bar{u}_i = \frac{\lambda}{\alpha_i + \lambda + a_{i+1}} u_{i-1} - \frac{\beta_i + b_{i+1}}{2(\alpha_i + \lambda + a_{i+1})} \quad (10)$$

この  $u_i = \bar{u}_i$  を (9) に代入して整理すると,

$$f_i(u_{i-1}) = \frac{\lambda(\alpha_i + a_{i+1})}{\alpha_i + \lambda + a_{i+1}} u_{i-1}^2 + \frac{\lambda(\beta_i + b_{i+1})}{\alpha_i + \lambda + a_{i+1}} u_{i-1}$$

$$-\frac{(\beta_i + b_{i+1})^2}{4(\alpha_i + \lambda + a_{i+1})} + \gamma_i + c_{i+1} \quad (11)$$

が得られる．この (11) と (8) の比較により，

$$\left. \begin{aligned} a_i &= \frac{\lambda(\alpha_i + a_{i+1})}{\alpha_i + \lambda + a_{i+1}} \\ b_i &= \frac{\lambda(\beta_i + b_{i+1})}{\alpha_i + \lambda + a_{i+1}} \\ c_i &= -\frac{(\beta_i + b_{i+1})^2}{4(\alpha_i + \lambda + a_{i+1})} \\ &\quad + \gamma_i + c_{i+1} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

となる．上式 (12) は， $a_{i+1}, b_{i+1}, c_{i+1}$  から  $a_i, b_i, c_i$  を逐次計算する方法を与えている．

この逐次計算の開始値 ( $a_I, b_I, c_I$ ) は以下のように求まる．まず式 (5) において  $i = I$  とする．すなわち，

$$\begin{aligned} f_I(u_{I-1}) &= \alpha_I u_I^2 + \beta_I u_I + \gamma_I + \lambda(u_I - u_{I-1})^2 \\ &= \lambda u_{I-1}^2 - 2\lambda u_I u_{I-1} + (d_I(u_I) + \lambda u_I^2) \end{aligned}$$

これと，(8) において  $i = I$  とした

$$f_I(u_{I-1}) = a_I u_{I-1}^2 + b_I u_{I-1} + c_I$$

を比較することで，次のように ( $a_I, b_I, c_I$ ) が求まる．

$$\left. \begin{aligned} a_I &= \lambda \\ b_I &= -2\lambda u_I \\ c_I &= d_I(u_I) + \lambda u_I^2 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

以上により，(4) の最適化問題が解けたことになる．すなわち，(13) の後に (12) を反復適用することで  $a_2, b_2, c_2$  を求め，更にそれを (6) に代入することで，目的関数の最小値

$$\begin{aligned} \min F &= d_1(u_1) + f_2(u_1) \\ &= d_1(u_1) + a_2 u_1^2 + b_2 u_1 + c_2 \end{aligned} \quad (14)$$

が求まる．また， $X$  と  $Y$  間の最適対応  $u_i = \bar{u}_i$  については，境界条件  $u_1$  並びに (10) から求まる．

図 3 はこうして導出された解析的 DP マッチングのアルゴリズムである．このアルゴリズムで求まるのは，目的関数 (4) の大局的最適解である．すなわち目的関数 (4) 自体は (2) の近似により導出されたものであるが，その後の計算過程において一切近似はなく，(4) の厳密な最適解を求めている．したがって，例えば計算順序を変えて  $i$  を  $I$  から 1 まで減らす方向に計算したとしても，同じ最適解，すなわち同じマッチング結果が求まる．

**Input:**  
 Coefficients of local distance functions:  
 $\{\alpha_i, \beta_i, \gamma_i \mid i = 1, \dots, I\}$   
 Boundary condition:  $u_1 = 1, u_I = J$   
 Weight:  $\lambda \in \mathbb{R}^+$

**Output:**  
 Optimal correspondence:  $\{\bar{u}_i \in \mathbb{R} \mid i = 1, \dots, I\}$   
 Minimum distance:  $\min F$

**Step 1: Initial condition**

$$\begin{aligned} a_I &= \lambda \\ b_I &= -2\lambda u_I \\ c_I &= d_I(u_I) + \lambda u_I^2 \end{aligned}$$

**Step 2: DP recursion**  
 for  $i = I - 1$  downto 2 do

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{\lambda(\alpha_i + a_{i+1})}{\alpha_i + \lambda + a_{i+1}} \\ b_i &= \frac{\lambda(\beta_i + b_{i+1})}{\alpha_i + \lambda + a_{i+1}} \\ c_i &= -\frac{(\beta_i + b_{i+1})^2}{4(\alpha_i + \lambda + a_{i+1})} + \gamma_i + c_{i+1} \end{aligned}$$

**Step 3: Termination**

$$\min F = d_1(u_1) + a_2 u_1^2 + b_2 u_1 + c_2$$

**Step 4: Backtrack**  
 $\bar{u}_1 = u_1 = 1$   
 for  $i = 2$  to  $I - 1$  do

$$\bar{u}_i = \frac{\lambda}{\alpha_i + \lambda + a_{i+1}} \bar{u}_{i-1} - \frac{\beta_i + b_{i+1}}{2(\alpha_i + \lambda + a_{i+1})}$$

図 3 解析的 DP マッチングのアルゴリズム  
 Fig. 3 Pseudo-code of analytical DP matching.

## 4. 実 験

### 4.1 シミュレーション実験

#### 4.1.1 マッチング結果

図 4 は，人工的に生成した局所距離  $\{d_i(j) = \alpha_i j^2 + \beta_i j + \gamma_i \mid i = 1, \dots, I\}$  の 2 例に対して，従来法並びに解析的 DP マッチングを行った結果である．ここで従来法とは，2. で述べた幅  $J$  の幅優先探索に基づく DP マッチング法である．同図は各  $(i, j)$  での  $d_i(j)$  の値を表した濃淡画像の上に，マッチングパス  $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_i, \dots, \bar{u}_I$  を黒い点列として表したものである．濃淡画像の各画素は白いほど  $d_i(j)$  の値が小さいことを意味する．

まず  $\lambda = 0$  の場合，連続性評価項がなくなるため，パスは各  $i$  で常に  $d_i(j)$  の極小点を通過し，不連続なものとなっている．一方， $\lambda$  が大きくなると，連続性評価項が支配的になるため，パスは直線的になってい

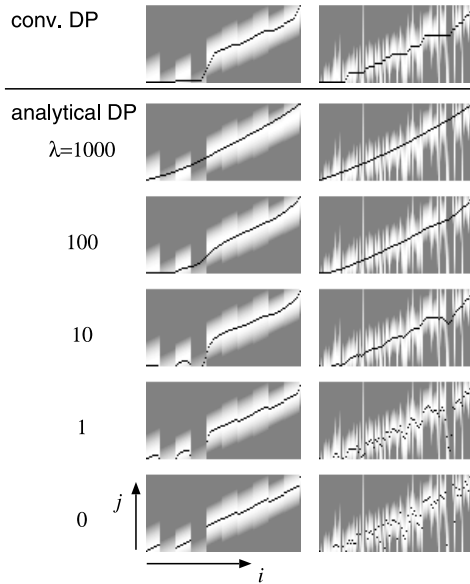


図 4 シミュレーション実験の結果  
Fig. 4 Simulation result.

る。その中間の  $\lambda$  では、 $d_i(j)$  の極小点付近を滑らかに通過できており、また従来法による結果とも類似していることが分かる。

#### 4.1.2 計算時間

次に次元パターン  $X, Y$  のマッチング時間を実測した。具体的には、両パターンの長さは同じ ( $I = J$ ) という条件のもと、この長さを 10 から 10000 まで変えた人工データを生成し、1 回のマッチングに要する平均計算時間を計測した。プログラムは C 言語で実装され、1.7 GHz CPU 搭載の計算機上で実行された。

比較のため、従来の DP マッチング法の計算時間も測定した。この従来法とは 4.1.1 で用いたもので、ここでも同様に単調連続性制約  $u_i - u_{i-1} \in \{0, 1, 2\}$  を課した。

計測結果を両対数グラフとして図 5 に示す。このように本手法の計算量的優位性が分かる。次元パターンについても優位性が実証されたことは、状態数が指数的に増加する二次元パターンのマッチングでは本手法が更に有力な解法となり得ることを示唆している。

なお、図 5 では意図的に局所距離の計算時間を含めずに漸化式の計算時間のみを示している。局所距離の計算時間を含めなかった理由は、その二次関数近似には様々な形式が考えられ、更に 5.4 にて後述するように最初から局所距離が二次関数として与えられるよ

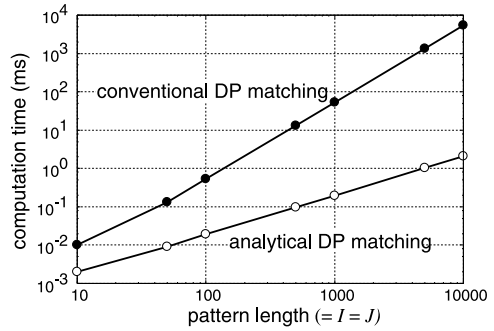


図 5 計算時間の比較  
Fig. 5 Computation time.

うな場合もあるためである。本手法及び従来法の漸化式計算量はそれぞれ  $O(I)$  と  $O(IJ) = O(I^2)$  であり、図 5 の両対数グラフの傾きの差異を裏づけている。

従来法においては、計算量の低減及び不自然なマッチングの排除を目的として、整合窓すなわち条件  $\|i - u_i\| \leq W$  による制約が利用されることが多い。パラメータ  $W$  は一般に  $I, J$  より小さいため、漸化式計算量は  $W/J$  倍に低減され、したがって  $O(WI)$  となる。整合窓導入により可能なマッチングの範囲が制約されるので、そうした制約のない本手法との単純な比較はできないが、形式的には  $W$  を小さく設定すれば本手法の  $O(I)$  に近づけることができる。しかし一般には  $W = \rho J$  ( $\rho$  は 1 以下の正定数) と設定することが多く<sup>(注2)</sup>、整合窓による低減効果は  $\rho$  倍にとどまり、従来法のオーダー  $O(IJ)$  に変化はない。実際、図 5 から予想されるように、例えば  $\rho = 0.1$  としても、 $I$  と  $J$  が 100 以上ならば本手法の方が格段に少ない計算量で済む。

#### 4.2 オンライン文字認識

解析的 DP マッチングの実パターンへの応用可能性を示すことを目的として、オンライン文字認識実験を行った。Ethem Alpaydin Digit [12] のオンライン孤立数字データセット(全 10 文字種)のうち、テストパターン全 3498 サンプルを認識対象  $X$  とした。各テストパターンについて、ペンアップ部の接続による 1 画化の後、縦横比を保ったまま文字全体の大きさを  $128 \times 128$  に正規化し、更にリサンプリングを行った。

また、テストパターンとは独立な学習パターンを観

(注2): 音声やオンライン文字などのパターン長  $J$  は、サンプリング周期に依存する。同様に、それらパターンの時間変動もサンプリング周期に依存することになる。したがって  $W$  を  $J$  に応じて定めることが多い。

察し，そこから各クラスの代表的なパターンを手動で合計 21 個（各文字種に 1~4 個）選出して標準パターン  $Y$  とした．なおパターン長  $I$  や  $J$  は平均で約 30 であった．各入力パターン  $X$  と標準パターン  $Y$  について解析的 DP マッチングを行い，得られた  $\min F$  に基づく最短距離識別を行った．

4.2.1 局所距離の二次関数近似

局所距離  $d_i(j)$  を二次関数近似する際，オンライン文字認識という問題の性質を考慮した．具体的には，正解標準パターンとのマッチングにおいては， $X$  と  $Y$  がほぼ類似したパターンであるため，マッチングパスが  $(i, j)$ -平面の対角線付近に存在することを期待した．すなわち  $\bar{u}_i$  が区間  $\Omega_i = [iJ/I - w, iJ/I + w]$  内に存在すべきと考えた．ここで  $w$  は正定数である．この考えに基づき，区間  $\Omega_i$  内の局所距離値  $\|x_i - y_j\|$  を用いて，二次関数近似を行い， $d_i(j)$  を定めることにした．

具体的には，図 6 に示す方法で各  $i$  の二次関数  $d_i(j)$  を決定した．まず近似区間  $\Omega_i$  の両境界点及び  $\Omega_i$  内で最小の局所距離をもつ点  $\tilde{j}$  の合計 3 点を定める．次に二次関数  $d_i(j)$  がそれら 3 点で真の局所距離値  $\|x_i - y_j\|$  をとるように  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$  を定めた．二次関数近似のパラメータ  $w$  は，従来法の整合窓と同じく実験的に定められるべき性質のものである．本実験では 3 とした．

4.2.2 マッチング結果

図 7 に本手法による 3 組のオンライン文字パターンのマッチング結果を示す．連続性評価項の重み  $\lambda$  は，実験的に 10 とした．正解標準パターンとのマッチング（同図左列）では， $(i, j)$ -平面の対角線付近に二次関数近似された局所距離の鋭いピーク（白に近い領域）が現れている．最適化されたマッチングパスはこのピーク付近を滑らかに通過していることが分かる．

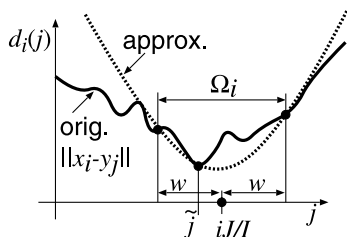


図 6 オンライン文字認識のための局所距離の二次関数近似

Fig. 6 Quadratic approximation of local distance.

不正解標準パターンとのマッチング（同図中央及び右列）でも同様にピーク付近を通過する滑らかなパスが求まっている．ただし，局所距離の真のピークが区間  $\Omega_i$  に入っていないためにピークは鋭くなく（特に同図中央の結果），したがってパス通過点での局所距離  $d_i(u_i)$  は比較的大きな値となっている．結果的に  $\min F$  も大きくなるので，不正解標準パターンが認識結果として選出されにくくなることが分かる．

4.2.3 認識率

全テストサンプルに対する解析的 DP マッチングの認識率は 93.9%であった．これに対し，線形伸縮マッチング（すなわち  $\lambda = \infty$ ）による認識率は 91.1%であった．このことから，解析的 DP マッチングの実問題への有効性が確認できる．また， $\lambda = 0$  とした場合，すなわち  $\bar{u}_i$  が二次関数のピーク位置に一致する場合の認識率は 93.1%であった．このことから，連続性評価項の必要性が分かる．

比較のため従来法によるオンライン文字認識も行った．その結果， $W = 5$  のときに最高認識率 94.5%を得た．本手法の認識率の方がやや低い．この差は 21 サンプルに相当する．ただし，本手法が一方向的に悪化したわけではなく，本手法で正解で従来法で誤認識も 48 サンプルあった（したがって，本手法で誤認識，従来法で正解は 69 サンプル）．

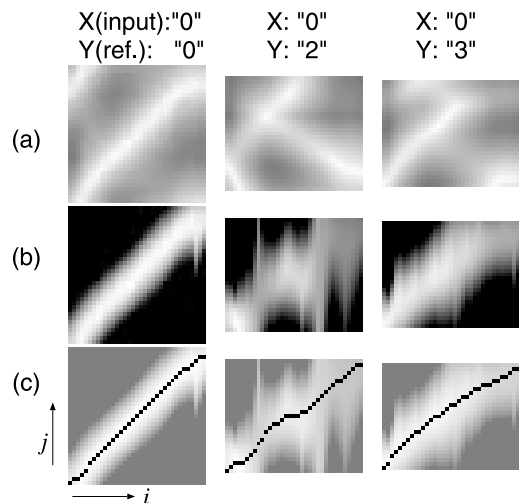


図 7 3 組のオンライン文字データの解析的 DP マッチング結果．(a) 真の局所距離．(b) 二次関数近似した局所距離．(c) (b) 上にマッチングパスを重畳したものの

Fig. 7 Results of analytical DP matching between on-line character patterns.

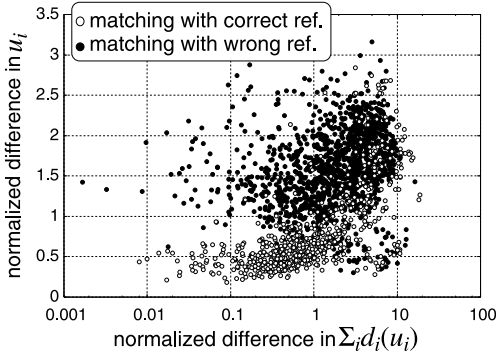


図 8 オンライン文字データに対する解析的 DP マッチングと従来の DP マッチングの差の分布  
 Fig. 8 Quantitative difference between analytical DP matching and conventional DP matching.

本手法のみで誤認識となった 69 サンプルを観察したところ、誤認識の原因の多くは二次関数近似にあった。特に時間ずれが大きいパターンにおいて、正しい標準パターンとのマッチングであっても、局所距離のピークが区間  $\Omega_i$  に入らず、結果的にマッチング距離  $\min F$  が大きくなっている場合が散見された。

4.2.4 マッチング精度の定量的評価

マッチング精度及び 4.2.1 の二次関数近似の妥当性の評価のために、本手法 ( $w = 3, \lambda = 10$ ) による結果と従来法  $W = 5$  による結果の差を図 8 のように求めた。同図の縦軸は両手法によるマッチングパスのずれ (各  $i$  でのパス  $\bar{u}_i$  の差の絶対値を全  $i$  で加算したもの) であり、横軸は両手法による  $\sum_i d_i(\bar{u}_i)$  の差の絶対値である<sup>(注3)</sup>。図では、いずれの軸の値もパターン長  $l$  で除して正規化した値を用いた。また見やすさのために横軸は対数軸とした。図中の白丸は正解標準パターンとの、黒丸は不正解標準パターンとのマッチング結果である。パターン数が多いので、白丸については 1/5、黒丸については 1/50 にランダムに間引いて表示した。

まず正解標準パターンとのマッチング結果 (白丸) について縦軸を見ると、パスのずれが各  $i$  で平均 0.7 程度と小さく、したがって本手法と従来法では多くの場合よく似たパスが求まっていることが分かる。横軸についても 0 に近い小さな値 (多くは 1 以下) が求まっている。以上より本手法のマッチング精度の高さが分かる。また、よく似たマッチングパス  $\bar{u}_i$  のもとで両手法の  $\sum_i d_i(\bar{u}_i)$  に差がないということから、本手法の局所距離  $d_i(\bar{u}_i)$  と従来法の  $d_i(\bar{u}_i)$  に差がない、

すなわち二次関数近似が適切に行われたことも分かる。

次に不正解標準パターンとのマッチング (黒丸) について縦軸を見ると、パスのずれが各  $i$  で平均 1.5 程度であり、正解標準パターンのときの 2 倍以上になっている。また、横軸についても 1 以上の場合が多数を占めており、正解標準パターンのときと大きく異なっている。このような結果が得られた原因は、4.2.2 でも見たように、不正解標準パターンとのマッチングでは局所距離の真のピークが区間  $\Omega_i$  に入らない場合が多いためである。こうした場合でも本手法によるパスは  $\Omega_i$  内を通過するであろう。これに対し従来法によるパスは真のピーク付近を通過する。この違いにより両パスに大きなずれが生じ、マッチング距離  $\sum_i d_i(\bar{u}_i)$  にも違いが生じたものと考えられる。なお、このように不正解標準パターンとのマッチングに失敗しても認識性能に悪影響を与えないことは、既述のとおりである。

以上の考察から、4.2.1 の二次関数近似と本手法は、多くの認識タスクに適した組合せといえる。しかし、大きな非線形伸縮を伴うパターンを認識する場合、正解標準パターンとのマッチングにおいても二次関数近似の失敗が頻発することが予想される。また、認識以外の問題に本手法を利用する場合についても、対象の非線形伸縮の範囲を考慮する必要がある。

4.2.5 多重スケール的な手法の導入

以上の考察結果が示すように、4.2.1 の方式での二次関数近似には限界がある。特に非線形伸縮が大きい場合やその範囲が予知できない場合、また  $d_i(j)$  が多峰的な場合には、二次関数近似が不適切な結果に終わることも多いと予想される。

こうした限界を緩和する方法として、多重スケール的な手法の導入を試みた。多重スケール的な手法は、多峰的な関数の極小値を見つける問題によく用いられており、したがってその本手法への導入は自然であるといえる。導入にはいくつかの形式が考えられるが、ここではパラメータ  $w$  を  $w_1$  から  $w_M$  まで  $M$  段階に減少させながら繰り返しマッチングパスを求める形式をとった。すなわち、 $w_1$  を用いて 4.2.1 の方式による二次関数近似を行い、マッチングパス  $\bar{u}_i^{(1)}$  を求める (括弧内添字は繰返し回数)。次に、そのマッチングパスが通過する点を中心として幅  $2w_2$  の近似区間を設

(注3): 従来法との比較を容易にするために、ここでは本手法についても  $\sum_i d_i(\bar{u}_i)$  (min F から連続性評価項分を除いたもの) を用いている。

定し (すなわち  $\Omega_i = [\bar{u}_i^{(1)} - w_2, \bar{u}_i^{(1)} + w_2]$ ), 二次関数近似の後, マッチングパス  $u_i^{(2)}$  を求める. このように, 最初に求めたマッチングパスの周辺で  $d_i(j)$  を狭い近似区間で精度良く近似し, 新たなマッチングパスを求める. 同様の処理をパラメータ  $w$  を変えながら  $M$  回繰り返し, 最終的なマッチングパス  $u_i^{(M)}$  及び距離  $\min F$  を求める.

反復回数  $M$  を 5 に, パラメータ  $w_1, w_2, \dots, w_5$  を 5, 4,  $\dots$ , 1 に設定して実験を行った結果, 認識率 95.3% が得られた. 本手法の単純な拡張ではあるものの, 従来法より高い認識率を得ることができており, 多重スケールの手法の導入が二次関数近似の限界の緩和に有効であると示唆された. ただし, もともとが少ないとはいえ計算量が  $M$  倍に増加することや, パラメータ数の増加については, 今後の検討が必要であろう.

## 5. 議 論

### 5.1 解析解法としての DP

DP の本質はその再帰的計算過程にあり, それは従来法のような離散的な問題だけでなく, 本手法のような連続的な問題にも適用し得るものである [1], [2]. しかしながら, デジタル化された対象が多いパターン認識・画像処理の分野において, DP は主として離散化された問題に適用されてきた. 実際, 連続的な問題に対して DP に基づく解析的解法を与えた例は, 次元及び二次元データの最適補間問題への適用例 [11] 程度と少ない.

### 5.2 マッチングのための関数近似に関する従来法

マッチング問題を解析的 DP で解くために, 本手法では局所距離を二次関数近似する. この考え方は Etoh [13] に着想を得ている. 同文献では, 2 画像のアフィン変換マッチング問題を局所距離の二次関数近似により解析的に解く手法を提案している. 局所距離すなわちマッチング誤差ではなく, パターンそのものを関数近似する試みもある [14], [15]. 例えば大町らは [14] パターンを多項式近似することで, 線形伸縮を含むマッチング問題を効率的に解く方法を提案している. このように関数近似の導入自体には従来より検討例があるものの, 対象としている問題が非線形な弾性マッチングである点と, 解法に DP を用いる点で, 本手法と従来を試みとは大きく異なっている.

### 5.3 連立解法との関係

目的関数  $F$  の最小化問題は, 解析的 DP 以外の方法でも解くことができる. すなわち, (4) で与えられる

目的関数  $F$  の極値条件  $\partial F / \partial u_i = 0$  を  $u_1, \dots, u_{I-1}$  について連立し, 得られた  $(I-1)$  元一次連立方程式を解く方法 (以下, 連立解法と呼ぶ) が考えられる. 詳細は略すが, この場合の連立方程式の係数行列は三重対角になる. したがって逆行列を求めることなく逐次代入処理で解くことができる [16]. 次元パターンを対象とすれば, 連立解法と本手法の計算量はほぼ同じである. ただし, 計算過程には違いがあり, 例えば, 連立解法では  $\{u_i\}$  が先に求まるのに対し, 本手法では  $\min F$  が先に求まる.

二次元的な問題への拡張を考えた場合, 両者の違いは顕著になる. すなわち, 変数  $u_i$  が  $u_{i_1, i_2}$  のように二次元化し, 更に  $u_{i_1, i_2}$  が連続性評価等により近傍の変数  $u_{i_1 \pm 1, i_2 \pm 1}$  と互いに影響するような場合, 連立解法はもはや三重対角行列には基づかず, 決定論的弛緩法 [17] に見られるような大規模な行列に基づくことになる. 一方, 解析的 DP には, Angel [11] の例のように, 問題のマルコフ性を生かして,  $u_{i_1, i_2}$  を  $i_1$  ごとにまとめたカラムワイズな処理 (すなわち次元パターンを列ベクトルの次元系列とみなした処理) が適用できる. その結果大規模な逆行行列計算が不要な最適化過程を実現できるものと考えられる.

### 5.4 局所距離が本質的に二次関数となる場合

以上では, 解析的 DP マッチングを従来法の近似解法として扱ってきた. しかしながら, 目的関数がもともと (4) の形式で書ける問題, すなわち局所距離  $d_i(j)$  が本質的に二次関数となる問題に対しては, 本手法はもはや近似解法ではなく, その大局的最適解を与える有力な手法となる. 例えば, 2 パターン間にあらかじめ与えられたいくつかのラフな対応関係を最適補間する問題としてマッチング問題が定式化された場合, まさに (4) の形式の目的関数が直接導出され, 本手法はその解法となる.

ところでこの補間問題は標準正則化理論 [17] に基づく一種の曲線当てはめ問題 (マッチングパスが曲線に相当) と等価である. この事実は, 本手法が正則化理論に基づく様々な問題に適用可能なことを示唆する. すなわち, マッチング問題に限らずとも, 事前知識によりペナルティ項が二次関数の和として定式化されるような正則化問題であれば, 本手法と同様の考え方によりその大局的最適解を効率良く求めることができる.

## 6. む す び

解析的 DP マッチングを提案した. 本手法は, 幅優



先探索に基づく従来の DP マッチングとは異なり, DP の解析的解法としての側面を利用した方法になっている. この解析的解法を可能としたのは, 局所距離を二次関数近似し, それに応じて状態を連続化することで, これまでのような有限個の状態を個々に考える必要をなくしたためである. したがって, 従来の DP マッチングでは困難であった状態が非常に多い問題に対して本手法は特に有効と思われる. 本論文では一次元パターン間の弾性マッチング問題を用いて, 本手法の基本的なアルゴリズムの導出を行った. また, オンライン文字パターンのマッチングを行うことで, 実際の問題にも十分応用可能であることを示した.

今後は [11] 等を参考に, 本論文の議論を進展させ, 指数関数的な状態数を要する二次元パターンの弾性マッチング問題を解析的 DP マッチングにより解く予定である. また 4.2.5 で述べた多重スケールの手法のような, 二次関数近似の影響を低減する方法についても検討したい. 更に, 5.4 で述べたような, 二次関数近似を経ずに直接本手法を適用し得る各種の正則化問題についても検討する予定である.

謝辞 本内容について画像の認識・理解シンポジウム (MIRU2006) での査読及び発表した際には, 多くの有益なコメントを頂いた. ここに深謝申し上げる次第である.

## 文 献

- [1] R. Bellman and S. Dreyfus, Applied Dynamic Programming, Princeton University Press, 1962.
- [2] 鍋島一郎, 動的計画法, 数学ライブラリー 7, 森北出版, 1968.
- [3] 迫江博昭, 千葉成美, “動的計画法を利用した音声の時間正規化に基づく連続音声認識,” 音響誌, vol.27, no.9, pp.483–490, 1971.
- [4] H. Sakoe and S. Chiba, “A dynamic programming algorithm optimization for spoken word recognition,” IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process., vol.ASSP-26, no.1, pp.43–49, 1978.
- [5] H. Sakoe, “Two-level DP-matching algorithm—A dynamic programming based pattern matching algorithm for continuous speech recognition,” IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process., vol.ASSP-27, no.6, pp.588–595, 1979.
- [6] 大田友一, 山田博三, “動的計画法によるパターンマッチング,” 情報処理, vol.30, no.9, pp.1058–1066, 1989.
- [7] A.A. Amini, T.E. Weymouth, and R.C. Jain, “Using dynamic programming for solving variational problems in vision,” IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell., vol.12, no.9, pp.855–867, 1990.
- [8] 内田誠一, “DP マッチング概説 — 基本と様々な拡張,” 信学技報, PRMU2006-166, 2006.

- [9] 内田誠一, 迫江博昭, “動的計画法に基づく単調連続 2 次元ワーブ法の検討,” 信学論 (D-II), vol.J81-D-II, no.6, pp.1251–1258, June 1998.
- [10] D. Keysers and W. Unger, “Elastic image matching is NP-complete,” Pattern Recognit. Lett., vol.24, no.1–3, pp.445–453, 2003.
- [11] E. Angel, “Dynamic programming for noncausal problems,” IEEE Trans. Autom. Control, vol.AC-26, no.5, pp.1041–1047, 1981.
- [12] ftp://ftp.ics.uci.edu/pub/machine-learning-data-bases/pendigits/
- [13] M. Etoh, “Promotion of block matching: Parametric representation for motion estimation,” Proc. ICPR, vol.1 of 2, pp.282–285, 1998.
- [14] 大町法子, 大町真一郎, 齋藤恒雄, “関数を用いた認識のためのパターン表現法,” 信学技報, PRMU2005-84, 2005.
- [15] J. Kybic and M. Unser, “Fast parametric elastic image registration,” IEEE Trans. Image Process., vol.12, no.11, pp.1427–1442, 2003.
- [16] J.R. Westlake (著), 戸川隼人 (訳), コンピュータのための線形計算ハンドブック, 培風館, 1972.
- [17] 坂上勝彦, 横矢直和, “弛緩法と正則化,” 情報処理, vol.30, no.9, pp.1047–1057, 1989.

## 付 録

### 式 (8) の妥当性

ここでは式 (8) のように  $f_i(u_{i-1})$  が常に  $u_{i-1}$  に関する二次式で表現できることを帰納法で証明する. まず  $i = I$  のとき,  $f_i(u_{i-1})$  の定義 (5) から

$$f_I(u_{I-1}) = \alpha_I u_I^2 + \beta_I u_I + \gamma_I + \lambda(u_I - u_{I-1})^2$$

であり, 右辺は  $u_{I-1}$  に関する二次式となっている.

次に  $i + 1$  ( $i < I$ ) のときに成り立つと仮定して,  $i$  のときも成り立つことを示す. この仮定は  $f_{i+1}(u_i)$  が

$$f_{i+1}(u_i) = a_{i+1} u_i^2 + b_{i+1} u_i + c_{i+1}$$

と表現できることを意味する. この式を (7) の右辺に代入すると, (9) が得られる. したがって結局  $f_i(u_{i-1})$  は (11) に帰着し, これは  $u_{i-1}$  に関する二次式になっている. 以上より, 証明終.

(平成 18 年 10 月 10 日受付, 19 年 2 月 8 日再受付)



内田 誠一 (正員)

平 2 九大・工・電子卒・平 4 同大大学院  
修士課程(情報)了。セコム(株)勤務を  
経て、現在、同大システム情報科学研究  
院知能システム学部門准教授。博士(工  
学)。画像パターン及び時系列パター  
ンの解析・認識に関する研究に従事。  
平 15 本会 PRMU 研究奨励賞, 平 18  
MIRU 長尾賞各受賞。IEEE, 情報処  
理学会, 映像情報メディア学会各会  
員。



迫江 博昭 (正員:フェロー)

昭 41 九工大・制御卒。昭 43 九大大  
学院修士課程(電子)了。同年日本電  
気(株)入社。平元, 九大に移り, シ  
ステム情報科学研究院知能システム  
学部門教授を経て, 現在同大名譽  
教授。工博。音声認識及び画像パ  
ターン解析の研究に従事。IEEE  
ASSP Senior Award, 本会業績賞,  
米沢ファウンダーズメダル受賞  
記念特別賞及び論文賞, (社)日  
本発明協会・内閣総理大臣発  
明賞, 九工大嘉村記念賞各受賞。